b) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x)\neq 0$ donc g est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)=]-1,\frac{1}{3}[$.

4°/ Soit $x\in\ ]-1,\frac{1}{3}[$, $g'(x)=\frac{1}{f'[g(x)]}$.

Posons $g(x)=y \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{(2+\sin y)^2}{2\cos y}$.

Or $g(x)=y \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow \frac{\sin y}{2+\sin y}=x \Rightarrow \sin y=2x+x\sin y$

$\Rightarrow \sin y=\frac{2x}{1-x} \Rightarrow (2+\sin y)^2=\frac{4}{(1-x)^2}$ et $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$

$\Rightarrow \cos y=\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1-x)^2}}=\frac{\sqrt{1-2x-3x^2}}{|1-x|}=\frac{\sqrt{1-2x-3x^2}}{1-x}$ (car $x\in]-1,\frac{1}{3}[$)

$$g'(x)=\frac{\frac{4}{(1-x)^2}}{\frac{2\sqrt{1-2x-3x^2}}{1-x}}=\frac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}.$$

Conclusion : $\forall x\in]-1,\frac{1}{3}[$, $g'(x)=\frac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}$.

Solution 12 :

1°/• On a $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2+2x+2>0$ (car $\Delta<0$) donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+2x+2}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et comme la fonction $x\mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de ces 2 fonctions.

• $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot(x+1)}{x^2+2x+2}$

$=\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{(x^2+2x+2)^2}\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}$.